Παρασκευή 8 Νοε. 2014
Μάθημα 2ο

"Κανονικές Εκφράσεις"

Ορισμός: Κανονική Έκφραση ενός αλφαβήτου Σ είναι μια λέξη του αλφαβήτου $\Sigma \cup \{(,), \emptyset, *\}$

Μια κανονική έκφραση είναι ένα πεπερασμένο σύνολο

Π.χ $L = 0^* 01^* (10)^*$ με $\Sigma = \{0,1\}$.

0^*: Μπορώ να πάρω από 0 εώς άπειρα μηδενικά

01^*: —"— —"— —"— 1 μηδενικό και από 0 εώς άπειρα ένα

$(1,0)^*$: {0000,.....} [Δεν μας το έγραψε γιατί θα μας μπερδέψει]

Συμπεράσματα:

Έστω ότι έχουμε μια κανονική έκφραση ενός αλφαβήτου

1. $\emptyset, a \in \Sigma$ είναι κανονική έκφραση
2. Αν a και b είναι κανονική έκφραση

τότε: (i) (ab) είναι κανονική έκφραση

(ii) $a \cup b$ είναι κανονική έκφραση

- Αν a είναι κανονική έκφραση $\Rightarrow a^*$ είναι κανονική έκφραση

Π.χ $L = 10^* (10^* \cup 0^*)$

Παράδειγμα:

L_1 = {οι λέξεις του αλφαβήτου $\Sigma = \{a,b\}$ που αρχίζουν και τελειώνουν με a} $= a\underbrace{(a \cup b)^*}a$.

(* Το aa είναι το ελάχιστο ως πληροφορία). Το a ισχύει αλλά είναι ελλειπής ως πληροφορία)

Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζω όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Ορισμός: Κανονική Γλώσσα είναι μια γλώσσα για την οποία υπάρχει μια έκφραση που την παριστάνει.

* Αν a είναι μια κανονική έκφραση, L(a) είναι η κανονική γλώσσα που αναπαριστά η κανονική έκφραση a

Ορισμός: L : (λέξη) → (γλώσσα)

1. $L(\emptyset) = \emptyset$ και $L(a) = \{a\}$, $\forall a \in \Sigma$

2. Αν a, b κανονικές εκφράσεις

τότε: (i) $L(ab) = L(a)L(b)$

(ii) $L(a \cup b) = L(a) \cup L(b)$

3. Αν a η κανονική έκφραση => $L(a^*) = (L(a))^*$

Παράδειγμα: Έστω $\Sigma = \{a, b\}$

Δείξτε ότι $(a \cup b)^*$ = κανονική έκφραση για όλο το Σ^*.

Λύση: $L((a\cup b)^*) \overset{(3)}{=} (L((a \cup b)))^* \overset{(2)}{=} (L(a) \cup L(b))^* \overset{(1)}{=} (\{a\} \cup \{b\})^* = (\{a,b\})^* = \Sigma^*$

Παράδειγμα: Ποια γλώσσα αναπαριστά η κανονική έκφραση

$((a \cup b)^* a)$.

Λύση: $L((a\cup b)^* a) \overset{(2)}{=} L((a\cup b)^*) L(a) \overset{(3)}{=} (L((a\cup b)))^* L(a)$

$\overset{(2)}{=} (L(a) \cup L(b))^* L(a) \overset{(1)}{=} (\{a\} \cup \{b\})^* \{a\} = (\{a,b\})^* \{a\}$

$= \{ \omega \in \{a,b\} : \omega$ τελειώνει σε $a \}$.

Άσκηση (1): L_1 = {οι λέξεις του αλφαβήτου $\Sigma = \{a,b\}$ με άρτιο μήκος} $= ((aa) \cup (ab) \cup (bb) \cup (ba))^*$

[Παίρνουμε όλα τα ζεύγη ώστε να είναι άρτιο μήκος!]

Άσκηση (2): L_2 = {οι λέξεις του αλφαβήτου $\Sigma = \{a,b\}$ με το πολύ δύο a}

$= (b^*ab^*ab^*) \cup (b^*ab^*) \cup b^*$

Άσκηση (3): L_3 = {οι λέξεις του αλφαβήτου $\Sigma = \{a,b\}$ με άρτιο πλήθος από το a} $= aab^*(aa)^*b^*$

ή $aab^*(b^*ab^*ab^*)^*$ || και τα 2 είναι σωστά

(2ου λύση είχε την 1η χωρίς τα aa)

Άσκηση (4): $L_4 = \{ \omega \in \{a,b\}^* \mid$ ο αριθμός των a στην ω δεν διαιρείται με το 4$\}$

$= ((ab^*) \cup (b^*ab^*a) \cup (b^*ab^*ab^*ab^*))(b^*ab^*ab^*ab^*ab^*)^*$

Ασκηση (5):

L_5 = {Το συνολο όλων των λέξεων στο {0,1} με περιττό μήκος}

$= (00 \cup 01 \cup 10 \cup 11)^*(0 \cup 1)$